



Alocação de Ativos

Principais Modelos, Limitações
e Tendências Atuais



Sinopse

A alocação de ativos constitui parte fundamental dos processos de investimento. Existem muitos modelos na literatura, que partem de diferentes pressupostos. Sua profunda compreensão possibilita uma melhor tomada de decisão por parte dos gestores de recursos. Contudo, tais modelos apresentam razoável nível de complexidade e sofisticação. Este texto tem como objetivo fazer uma revisão didática dos principais modelos de alocação de ativos por meio de exemplos práticos, apresentar as limitações relacionadas a cada um e fornecer uma visão sobre as tendências atuais.

Índice

| | |
|----|---|
| 04 | Introdução |
| 07 | O Processo de Alocação |
| 09 | Teoria Moderna de Carteiras e Modelos de Alocação |
| 12 | Crenças de Investimento e Modelos de Alocação |
| 14 | Incerteza e os Modelos de Alocação |
| 16 | Alternativas e Variações nos Modelos de Alocação |
| 17 | Comentários Finais |
| 18 | Apêndice A: Modelo de Média-Variância |
| 19 | Apêndice B: Modelo de Black-Litterman |
| 20 | Referências Bibliográficas |



Conceitualmente,
a alocação de ativos
procura **considerar** o
compromisso entre
risco e retorno

Introdução

Naturalmente, existe uma preocupação constante dos gestores de recursos para aprimorar o processo de investimento, tornando-o cada vez mais adequado às reais necessidades dos clientes. Tais processos têm se tornado cada vez mais complexos, dada a crescente quantidade de informações disponíveis e o surgimento de modelos matemáticos e estatísticos mais sofisticados para a tomada de decisão¹. Esta evolução requer que os conhecimentos quantitativos sejam atualizados para garantir “o estado da arte” na gestão de recursos.

Conceitualmente, a alocação de ativos procura considerar o compromisso entre risco e retorno, ajustando a participação de cada ativo na carteira de investimentos de acordo com a tolerância ao risco, os objetivos e o horizonte de tempo do investidor. Obviamente, torna-se importante diferenciar o processo de alocação dos modelos de alocação. Processos são fundamentais para definições relativas às políticas de investimentos e à garantia da qualidade das informações a serem consideradas nas análises². Por outro lado, modelos são representações matemáticas e estatísticas da realidade, que servem de apoio à tomada de decisão. Neles, são consideradas as restrições impostas pelas políticas de investimentos e utilizadas as informações relevantes, como dados de entrada provenientes diretamente do mercado ou de análises.

Na literatura, existem muitos modelos de alocação de ativos, de diferentes níveis de complexidade e baseados em diferentes conjuntos de hipóteses. O conhecimento destes possibilita uma melhor tomada de decisão, por parte dos gestores de recursos. Inicialmente, o trabalho de Markowitz (1952), e seu conceito de fronteira eficiente, lançou as bases da maior parte dos modelos de alocação de ativos conhecidos como modelos média-variância³. Posteriormente, surgiram trabalhos para incorporar as informações sobre as crenças do investidor, como o conhecido

¹O aumento da quantidade de informação relevante disponível para a tomada de decisão e a utilização de sofisticados modelos matemáticos e estatísticos necessitam de elevado poder de processamento computacional e infraestrutura de tecnologia da informação. Assim, garante-se disponibilidade e tempo de resposta adequados às demandas das áreas de gestão de recursos.

²Para um fundo de investimentos, o processo de alocação em ativos representa a sequência de passos através dos quais a carteira é construída e depende da definição do fundo: tipo de ativos permitidos, maturidades permitidas para os ativos, limites de posições nos ativos permitidos, benchmark do fundo, limites de risco, etc.

³Harry Max Markowitz, ganhador do prêmio Nobel de economia de 1989. Em seu artigo de 1952, discute a definição de fronteira-eficiente no contexto de seleção de carteiras de investimentos. A fronteira eficiente representa a relação entre risco e retorno (ou média-variância) para carteiras de investimento.

modelo de Black e Litterman (1992)⁴. Considerando-se as incertezas inerentes aos processos de investimento, surgiram propostas para deixar os modelos mais robustos, como o trabalho de Michaud (1998)⁵, por meio do conceito de simulação de Monte Carlo⁶. Finalmente, modelos mais recentes abandonaram o conceito de média-variância, substituindo-o pelo da alocação de risco e são conhecidos como modelos de gerenciamento de risco. Um exemplo dessa família que ficou bastante conhecido, após a crise de 2008, é o modelo de paridade de risco⁷.

Cabe mencionar que, dentre os modelos de alocação abordados no texto, vamos focar naqueles chamados estáticos, unitemporais e que não tratam do passivo do investidor. Os modelos estáticos são aqueles em que a composição da carteira é definida e mantida fixa para certo horizonte de tempo. Em oposição aos modelos estáticos, nos modelos dinâmicos, a composição da carteira é sempre ajustada e pode envolver complexos procedimentos de otimização estocástica. Apesar de os modelos estáticos serem naturalmente unitemporais, do ponto de vista do horizonte de tempo considerado, estes modelos também poderiam ser multitemporais. Adicionalmente, no caso de investidores que

possuem preocupações com seu passivo, existem técnicas de gestão conjunta de ativos e passivos (ALM, do inglês *Asset Liability Management*). Os modelos de ALM envolvem informações futuras de fluxo de caixa que muitas vezes não são conhecidas a priori.

Consideradas a variedade e complexidade dos modelos de alocação de ativos existentes, vamos apresentar somente aqueles mais clássicos, com seus pontos positivos e negativos. Em especial, destacaremos as dificuldades de implementação e limitações envolvidas para servirem de guia aos que iniciam seus primeiros passos na área de modelagem de alocação de ativos, aplicada a gestão de recursos. Evidentemente, alguns dos modelos possuem relativa sofisticação matemática e estatística necessárias para a sua compreensão. Para melhorar a intuição sobre o funcionamento destes, apresentaremos aplicações práticas, com fins didáticos. Faremos também um direcionamento com relação a modelos de alocação mais recentes e aparentemente mais promissores. Finalmente, serão apresentadas referências úteis ao longo do texto e notas de rodapé que servirão de base para aqueles que queiram se aprofundar na literatura existente.

Modelos estáticos são aqueles em que a **composição da carteira é definida e mantida fixa** para certo horizonte de tempo

⁴Fisher Black e Robert Litterman desenvolveram, enquanto trabalhavam na Goldman Sachs, um modelo de alocação de ativos publicado em 1992 que possibilita a inclusão de visões ou crenças do investidor relacionadas ao mercado.

⁵Richard Michaud publicou, em 1998, um artigo em que apresenta a modelagem que procura deixar as alocações resultantes mais robustas, considerando as incertezas das estimativas amostrais utilizadas como dados de entrada nos modelos até então existentes.

⁶A simulação de Monte Carlo consiste em algoritmos computacionais que se baseiam em amostragens aleatórias, repetidas exaustivamente para obter resultados numéricos e, consequentemente, requer certo poder de processamento computacional para a sua realização.

⁷O modelo de paridade de risco utiliza somente informações sobre o risco dos ativos envolvidos, sem considerar diretamente as expectativas de retorno. Foi aplicado pela primeira vez pelo fundo All Weather, da Bridgewater, em 1996.



O processo de alocação

A alocação de ativos possui duas dimensões fundamentais: modelos e processos de apoio. Os primeiros são representados pelos modelos de alocação de ativos, ferramentas analíticas desenvolvidas para dar apoio à decisão. Por outro lado, os processos representam discussões e definições sobre horizonte de investimentos, classes de ativos, geração de estimativas de risco e retorno, periodicidade ou regra de revisão das alocações, forma de utilização dos modelos de apoio e definição de limites de risco.

Definitivamente, a dimensão dos processos não deve ser subestimada na alocação de ativos. A precisão e qualidade dos dados de entrada e, conseqüentemente, dos dados de saída dos modelos de apoio dependem dessa dimensão. O princípio conhecido pelo acrônimo em inglês GIGO (*Garbage In, Garbage Out*) refere-se ao fato de que o modelo processa suas entradas e produz saídas, sem qualquer juízo de valor e possui aplicação direta aqui.

A seguir, algumas definições que fazem parte dos processos de alocação:

a) Horizonte de Investimento: o prazo que o investidor pretende manter o investimento. É dependente das políticas de investimento e avaliação da capacidade de geração de projeções confiáveis de risco e retorno para as classes de ativos envolvidas, para certo período futuro⁸.

b) Classes de Ativos: o conjunto de ativos com características e comportamentos semelhantes e que estão submetidos às mesmas regulamentações. Devem ser representativas em termos de abrangência de mercado, para endereçar as principais alternativas existentes. Exemplos de classes de ativos são: ações, títulos pós-fixados, títulos indexados à inflação, juros pré-fixados de curto prazo, juros pré-fixados de longo prazo, moedas estrangeiras, etc.⁹.

c) Estimativas Futuras de Retorno: as expectativas dos retornos das classes de ativos para o horizonte de tempo definido. Sua definição é uma tarefa muito delicada e envolve muitas incertezas. Adicionalmente, deve-se atentar para a consistência entre os retornos esperados para as diversas classes de ativos¹⁰.

⁸Do ponto de vista do investidor, a determinação correta do horizonte de investimento é fundamental, pois o tempo que o valor poderá permanecer aplicado influencia na rentabilidade e, muitas vezes, na tributação.

⁹As classes de ativos a serem consideradas devem estar alinhadas à política de investimentos. Torna-se importante ressaltar, por exemplo, que ao invés da classe "ações", poderíamos utilizar cestas de empresas de baixa, média ou alta capitalização. Outra alternativa seria sua substituição por classes representativas de setores importantes como o financeiro, telecomunicações, energia, etc. Trabalhar com classes de ativos ao invés dos ativos individuais facilita muito as estimativas de risco e retorno, pois diminui o número de estimativas a serem feitas e a agregação também contribui para reduzir os erros envolvidos nos processos.

¹⁰Caso os retornos esperados sejam estimados por fontes independentes, deve-se assegurar que todos partam de um cenário comum para a conjuntura econômica local e global no horizonte de tempo de interesse. Claramente, para cada cenário econômico mais ou menos favorável, novas expectativas de retorno devem ser geradas. Uma referência atual sobre assunto é o livro de Ilmanen (2011).



d) Estimativas Futuras de Risco dos Ativos: ao tratar de risco dos ativos, geralmente tem-se em mente a chamada matriz de covariância, que possui informações sobre o risco dos ativos individualmente e suas correlações. As estimativas de risco aqui referidas não são necessariamente as mesmas utilizadas pelas áreas de controle de risco¹¹.

e) Regras de Revisão da Alocação: são as regras utilizadas para o rebalanceamento da carteira de investimento. Existem regras simples como, por exemplo, um rebalanceamento periódico ou mesmo seguindo as datas de mudanças de composição de índices. Por outro lado, o rebalanceamento pode ser acionado devido a mudanças no cenário econômico, no comportamento ou no regime dos ativos, limiares para realização de ganhos da carteira (profit taking) ou limites para perdas máximas (stop loss e maximum drawdown)¹².

f) Processo de Utilização da Modelagem de Apoio: para quase todas as modelagens de apoio, são necessárias estimativas futuras de risco e/ou retorno. Assim, antes de se pensar em utilizar qualquer modelo, é importante ter tais estimativas e compreender em detalhes os modelos disponíveis. As estimativas de risco e retorno representam crenças. Assim, os modelos são capazes de, diante de tais estimativas, produzir alocações de forma consistente¹³. Os modelos são ferramentas de apoio ao processo de investimento e devem ser utilizados para possíveis análises de sensibilidade dos resultados esperados dadas as variações ou incertezas nas expectativas de risco e/ou retorno. Os modelos também devem impor restrições de máximos e mínimos face às alocações para cada classe de ativos, sendo que estas não precisam ser seguidas à risca, pois o processo deve ser flexível para que se possa adequar as alocações obtidas utilizando possíveis crenças do investidor.

g) Alocação Estratégica de Ativos (SAA, do inglês Strategic Asset Allocation) e Tática (TAA, do inglês Tactical Asset Allocation): A definição do horizonte de tempo não implica que o gestor de recursos necessite analisar a carteira periodicamente somente nestes intervalos. Na realidade, o gestor pode determinar a alocação com base em um horizonte de tempo mais longo, no caso da SAA. Em horizontes mais curtos, pode utilizar-se de pequenos desvios táticos (TAA) em relação à alocação de longo prazo (SAA), a fim de tentar gerar mais ganhos à carteira¹⁴.

h) Limites de Risco: é o valor máximo que o ativo ou classe de ativo pode contribuir para o risco total do investimento. Os limites devem respeitar as políticas de investimento e contemplar os limites de risco para ativos individuais, classes de ativos e carteira como um todo. Adicionalmente, também deve ser considerado como limite de risco o desvio máximo permitido da TAA com relação à SAA.

Diferentes modelos de alocação serão abordados ao longo do texto. Com propósito didático, utilizaremos um mesmo conjunto de ativos para ilustrar cada um deles. Utilizaremos as seguintes classes de ativos: renda variável local, títulos do Tesouro Nacional pós-fixados, pré-fixados, investimentos no exterior e investimentos alternativos. Tais classes de ativos serão representadas respectivamente por: IBrX100¹⁵, IMA-B 5+¹⁶, IRF-M¹⁷, S&P 500¹⁸ e ouro ativo financeiro. No caso do S&P 500 e do ouro, serão considerados os chamados quantos¹⁹. O histórico considerado inicia-se em outubro de 2003 e termina em setembro 2014. Consideramos como ativo livre de risco a taxa do CDI²⁰. No restante do texto, vamos nos referir a este conjunto de ativos como caso de estudo. Para exemplificar, detalharemos a alocação de um investidor cujo perfil de risco seja alinhado com um portfólio de volatilidade de 8% a.a.

¹¹Na prática e na literatura acadêmica, costuma-se aceitar que o risco das classes de ativos seja estimado com base na dispersão de seus retornos históricos. Apesar disso, o comportamento de risco das classes de ativos no passado pode ser substancialmente diferente do que ocorrerá no futuro. De forma geral, sabe-se que, durante períodos de crise, a correlação entre as classes de ativos costuma aumentar. Além disso, muitas vezes o histórico disponível é reduzido. Existem formas conhecidas de se estimar a matriz de covariância de forma dinâmica (por exemplo, utilizando a técnica Exponentially Weighted Moving Average - EWMA) ou maneiras baseadas nos chamados estimadores de encolhimento, como o proposto por Ledoit e Wolf (2003, 2004) para tentar amenizar tais problemas.

¹²De forma geral, os rebalanceamentos não devem ser feitos muito frequentemente, pois elevam os custos de transação, impactando negativamente o resultado final da carteira. A periodicidade da revisão também deve levar em conta as características dos mercados envolvidos e mudanças nas expectativas de risco e retorno causadas pela chegada de novas informações relevantes.

¹³A consistência desse processo permite que, ao longo do tempo, possa ser avaliada a qualidade das estimativas futuras de risco e/ou retorno, além do próprio modelo de apoio. Os modelos utilizados não mudam tão rapidamente quanto seus dados de entrada. Entretanto, devem ser sempre atualizados para garantir-se o estado da arte da gestão de recursos.

¹⁴A chamada alocação estratégica ou SAA possui um horizonte de tempo mais longo. Por outro lado, a alocação tática ou TAA procura alterar a alocação durante intervalos mais curtos, com o objetivo de obter ganhos adicionais para a carteira.

¹⁵O IBrX100 é um índice que mede o valor da carteira teórica composta pelas 100 ações mais negociadas em termos de número de negócios e volume financeiro na BM&FBovespa, ponderadas pelo valor de mercado.

¹⁶O IMA-B 5+ faz parte de uma família de índices de renda fixa publicados pela ANBIMA. Refere-se aos títulos do Tesouro Nacional pós-fixados indexados ao IPCA com mais de cinco anos para o vencimento, ponderados pelo valor de mercado.

¹⁷O IRF-M faz parte de uma família de índices de renda fixa publicados pela ANBIMA. Refere-se aos títulos do Tesouro Nacional pré-fixados, ponderados pelo valor de mercado.

¹⁸O S&P 500 ou Standard & Poor's 500 é um índice que mede o valor de uma carteira teórica composta de 500 ações com maior capitalização de mercado que sejam listadas na NYSE ou NASDAQ, ponderadas pelo valor de mercado.

¹⁹Existem investimentos chamados Quanto que possibilitam que o investidor obtenha a variação de preços em dólares e a taxa do CDI em sua aplicação em reais.

²⁰A taxa do CDI (Certificado de Depósito Bancário) representa a taxa de juros dos títulos emitidos pelos bancos como forma de captação ou aplicação dos recursos excedentes. A taxa do CDI é publicada pela CETIP.

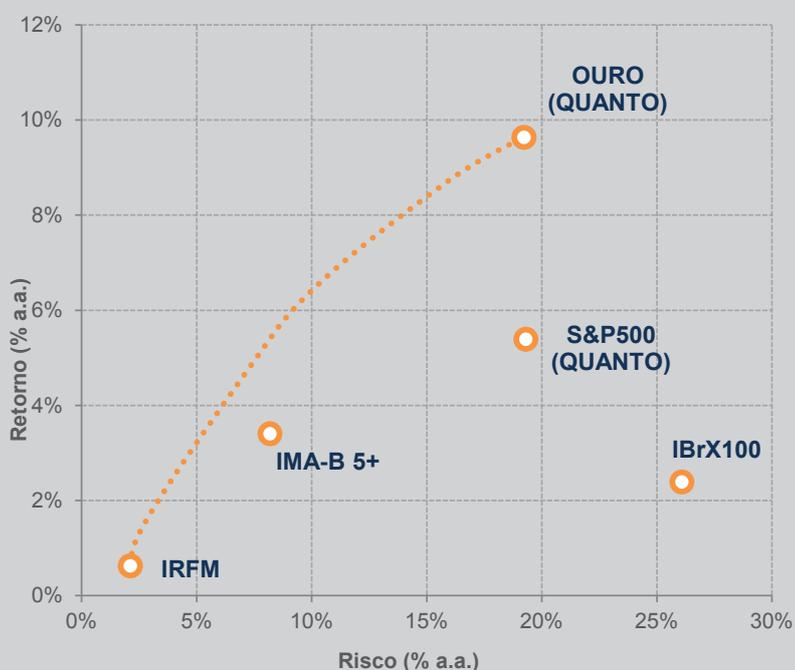
Teoria Moderna de Carteiras e Modelos de Alocação

A teoria moderna de carteiras foi introduzida em 1952 por Markowitz²¹ e busca maximizar o retorno esperado de uma carteira para um dado nível de risco ou, de forma equivalente, minimizar o risco de uma carteira para um dado nível de retorno desejado. Assim, para um investidor racional, não faria sentido selecionar uma carteira que tivesse um risco maior que outra, quando o retorno esperado de ambas for igual. Da mesma forma, não faria sentido selecionar uma carteira de retorno menor que outra, caso o nível de risco de ambas seja igual. A formulação matemática do problema de otimização descrito pode ser encontrada no **Apêndice A**. Na literatura, os

modelos baseados nesse compromisso entre retorno e risco são chamados de **modelos média-variância**, pois usualmente o retorno é estimado pela média e o risco através da variância²².

Em termos conceituais, todas as “**carteiras-soluções**” do problema de otimização entre retorno e risco são denominadas de eficientes e o conjunto destas, denominado de **fronteira eficiente**. A obtenção da **fronteira eficiente** é intuitiva e computacionalmente simples. O problema a ser resolvido necessita, como entrada, dos retornos excessivos esperados dos ativos e a matriz de covariância dos mesmos.

Figura 1. Fronteira eficiente



(Fonte: Itaú Asset Management em Junho de 2015)

Na **Figura 1**, apresentamos a fronteira eficiente para o caso de estudo²³. Observa-se que alguns dos ativos individuais também não estão na fronteira eficiente e é importante destacar que toda a área abaixo da curva está repleta de carteiras não eficientes, que não representamos por comodidade.

²¹Markowitz classificou a teoria que ele introduziu em 1952 de Teoria de Carteiras e não exatamente teoria moderna de carteiras.

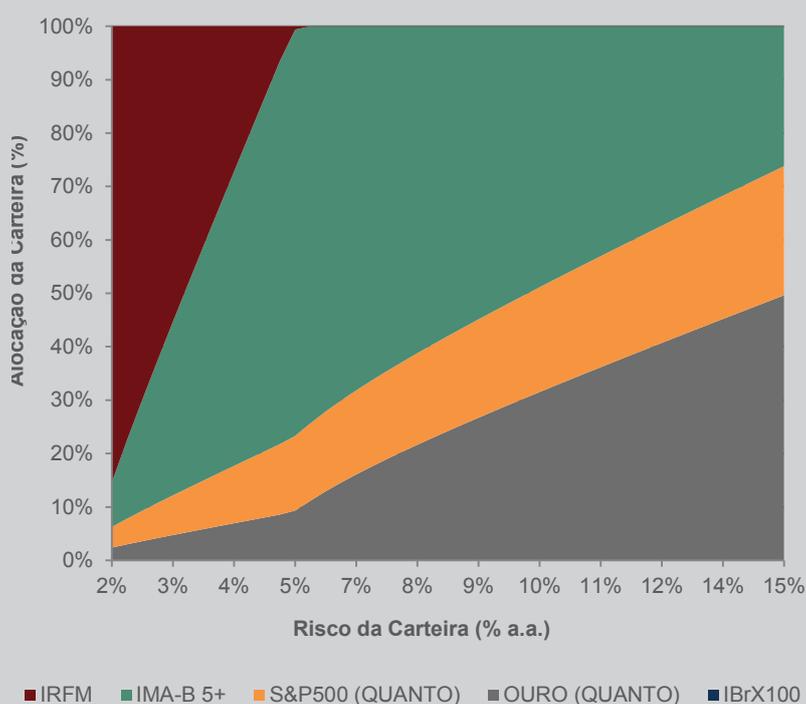
²²Por simplicidade, ao longo do texto, utilizaremos a nomenclatura retorno esperado ao invés de retorno esperado excessivo. Nas carteiras no espaço média-variância, são considerados somente ativos com risco, ou seja, o ativo livre de risco não entra no processo de otimização. Assim, torna-se natural considerar todos os retornos dos ativos com risco de forma excessiva ao retorno do ativo livre de risco.

²³Para o caso de estudo, vamos assumir, por simplicidade, como estimativas futuras de médias e matriz de covariância os respectivos valores amostrais. Contudo, cabe destacar que este procedimento não é o mais adequado, dado que comportamentos passados não necessariamente serão repetidos no futuro.

através da diversificação, o investidor obtém o mesmo retorno potencial de longo prazo, experimentando menores oscilações ao longo do caminho.

A diversificação em investimentos, uma decorrência da teoria moderna de carteiras, corresponde ao fato de que a combinação de ativos de risco pode resultar em uma carteira com menor nível de risco que qualquer um dos ativos individualmente considerados²⁴. Em outras palavras, através da diversificação, o investidor obtém o mesmo retorno potencial de longo prazo, experimentando menores oscilações ao longo do caminho. Contudo, o procedimento clássico da média-variância não possui nada que explicitamente faça com que as carteiras resultantes não sejam concentradas em alguns ativos em específico. Na Figura 2, é apresentada a composição das carteiras resultantes do modelo de média-variância para o caso de estudo. Nota-se claramente a concentração em alguns ativos específicos.

Figura 2. Alocações resultantes do modelo de média-variância



(Fonte: Itaú Asset Management em Junho de 2015)

Alocação da carteira com volatilidade de 8%a.a.

| Classe de Ativo | Alocação |
|-----------------|----------|
| IRFM | 0% |
| IMA-B5+ | 61% |
| S&P500 (Quanto) | 17% |
| Ouro (Quanto) | 22% |
| IBX100 | 0% |

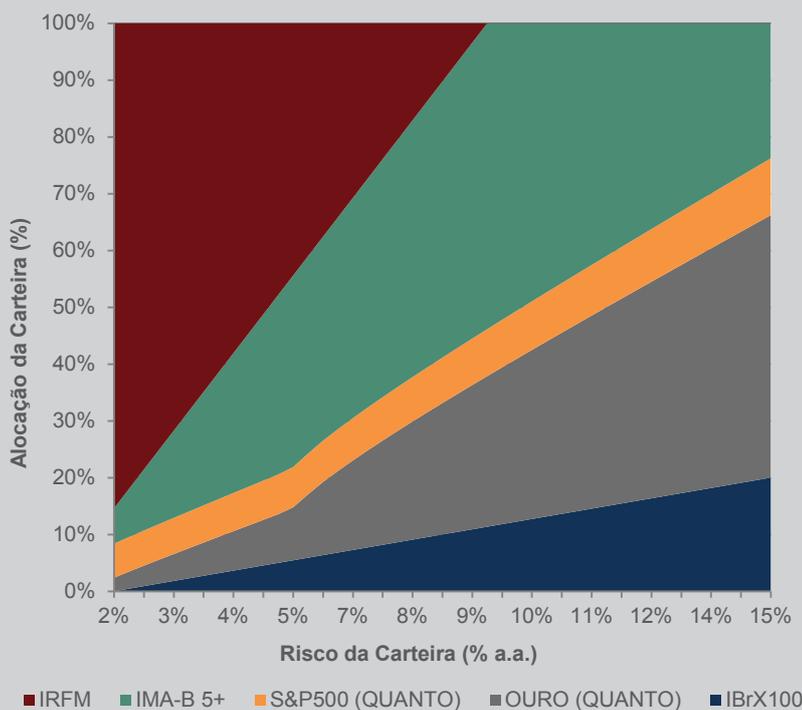
(Fonte: Itaú Asset Management em Junho de 2015)

²⁴Nesse contexto, a diversificação está relacionada à quantidade de ativos diferentes na composição da carteira. Tecnicamente, diversificação significa redução do risco não sistemático através do investimento em uma variedade de ativos.

De forma geral, os gestores de recursos pensam em termos de proporções do patrimônio sob sua gestão no momento de fazer a alocação. No modelo de média-variância, as alocações resultantes do procedimento de otimização não são particularmente intuitivas e podem sugerir proporções de alocação extremas. Assim, o modelo de média-variância é dificilmente aplicado em sua forma clássica desenvolvida por Markowitz.

Na prática, cabe destacar que a otimização de média-variância é extremamente sensível aos dados de entrada e sua utilização exige extremo cuidado no processo de geração de estimativas de risco e retorno das classes de ativos. Expectativas inconsistentes geram alocações inconsistentes e, com isso, o modelo acaba operando como um “maximizador de erros” ao buscar maximizar rentabilidades ajustadas ao risco²⁵. Na **Figura 3**, apresentamos a mudança nas alocações sugeridas pelo procedimento de média-variância ao modificar levemente os dados de entrada²⁶. Observa-se que as alocações resultantes modificam-se significativamente quando comparadas àquelas apresentadas na **Figura 2**.

Figura 3. Sensibilidade das alocações às mudanças nos dados de entrada



As limitações do procedimento de média-variância com relação à sensibilidade de suas carteiras aos dados de entrada são claras. Os profissionais que atuam com gestão de recursos possuem análises e opiniões que precisam ser integradas às metodologias de alocação e que podem reduzir os possíveis riscos de estimação envolvidos. Na próxima seção, apresentaremos um modelo que procura incorporar crenças do investidor ao processo de alocação.

(Fonte: Itaú Asset Management em Junho de 2015)

Alocação da carteira com volatilidade de 8% a.a.

| Classe de Ativo | Alocação |
|-----------------|----------|
| IRFM | 17% |
| IMA-B5+ | 45% |
| S&P500 (Quanto) | 8% |
| Ouro (Quanto) | 21% |
| IBX100 | 9% |

(Fonte: Itaú Asset Management em Junho de 2015)

²⁵Grande parte dos modelos de média-variância assume que a distribuição do mercado seja conhecida. Assim, tais metodologias são alocações baseadas em uma amostra de dados e mostram-se muito sensíveis a erros nas estimações dessas distribuições do mercado. Os erros nas estimações das distribuições do mercado implicam no chamado risco de estimação no processo de decisão das alocações.

²⁶No caso específico, aumentamos em apenas 10% o valor do retorno esperado do IBrX100 e o procedimento de média-variância passou a atribuir pesos não-nulos a este ativo.



Crenças de Investimentos e Modelos de Alocação

O mais conhecido modelo a considerar crenças ou visões por parte do investidor no processo de alocação foi desenvolvido em 1990, e publicado em 1992, por Fisher Black e Robert Litterman. Conforme mencionado anteriormente, o modelo de média-variância de Markowitz pode produzir alocações pouco intuitivas e muito pouco diversificadas. O modelo Black-Litterman procurou resolver este problema partindo de uma carteira neutra e combinando esta com as crenças do investidor. Posteriormente, surgiu uma classe de modelos diferentes baseados na ideia inicial de Black e Litterman (1992) e chamados genericamente de modelos Black-Litterman²⁷.

Originalmente, este modelo parte da carteira neutra dada pelos retornos esperados de equilíbrio de mercado determinados pelo CAPM (do inglês, *Capital Asset Pricing Model*)²⁸. O modelo CAPM foi desenvolvido a partir do trabalho de Markowitz (1952), por alguns autores de forma independente²⁹, incluindo William Sharpe, ganhador do prêmio Nobel de economia de 1990. O modelo CAPM procura explicar o retorno de um ativo de risco através do retorno de uma carteira de mercado e do retorno do ativo livre de risco. O CAPM foi criticado pelos trabalhos de Fama e French (1992, 1993, 2004)³⁰ e existem muitas alternativas mais flexíveis de modelagem que o substituem como o APT (do inglês, *Arbitrage Pricing Theory*)³¹, que possibilita a inclusão de diversos fatores ao explicar o retorno de um ativo de risco. Contudo, a simplicidade e fácil interpretação do CAPM ainda fazem com que ele seja amplamente utilizado.

No modelo Black-Litterman, a forma como as crenças do investidor podem ser incorporadas ao procedimento de alocação de ativos é bem flexível. A visão do investidor com relação aos desempenhos dos diversos ativos de risco pode ser parcial ou completa em termos do universo de ativos considerados. Para mais detalhes, direcionamos o leitor para o **Apêndice B**, em que apresentamos o problema de otimização do modelo de Black-Litterman e a maneira como as visões do investidor são adicionadas à carteira neutra de mercado.

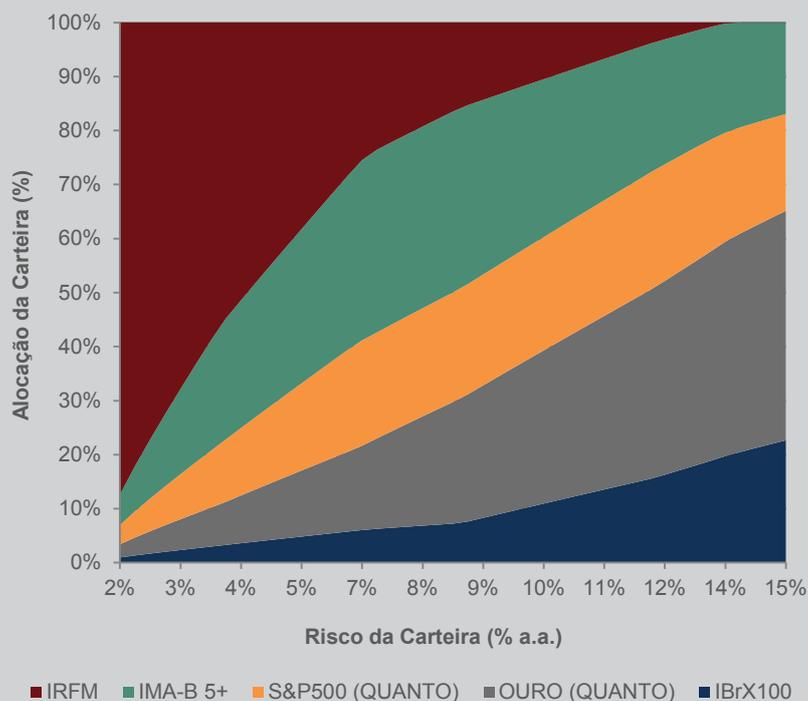
²⁷Existem muitos modelos derivados do Black-Litterman original de 1992. Em Walters (2014), traça-se uma cronologia e taxonomia para tais modelos. ²⁸O CAPM separa o risco em uma componente sistemática e outra idiossincrática. A componente idiossincrática tende a desaparecer ao se diversificar a carteira, enquanto a componente sistemática não. Quando o mercado está em equilíbrio, o CAPM assume que os investidores serão compensados somente pelo risco sistemático. Adicionalmente, o CAPM necessita da definição de uma carteira de mercado que pode ser aproximada por índices significativos de ações ou renda fixa. Assim, o retorno esperado de um ativo usando o CAPM é função da sensibilidade do próprio ativo à carteira de mercado (beta), o retorno esperado desta carteira e o retorno esperado do ativo livre de risco. A sensibilidade do ativo à carteira de mercado pode ser modelada usando um procedimento simples de regressão linear ou procedimentos estatísticos mais sofisticados como o filtro de Kalman. ²⁹O CAPM foi introduzido por alguns autores de forma independente: Treynor (1961, 1962), Sharpe (1964), Lintner (1965a, 1965b) e Mossin (1966). ³⁰Os trabalhos de Eugene Fama e Kenneth French incluem o famoso modelo de três fatores Fama-French. Enquanto o CAPM utiliza somente um fator, denominado retorno da carteira de mercado, para explicar o retorno de um ativo de risco, o modelo Fama-French adiciona mais dois fatores: a carteira SMB (do inglês, Small Minus Big), formada como a diferença entre o retorno das ações de menor capitalização de mercado e o retorno das ações de maior capitalização de mercado; e a carteira HML (do inglês, High Minus Low), formada como a diferença entre o retorno das ações com alto valor da razão entre valor contábil e valor de mercado e o retorno das ações com baixo valor da razão entre valor contábil e valor de mercado.

³¹O APT foi desenvolvido por Ross (1976) e trata-se de uma teoria geral de precificação de ativos em que o retorno esperado de um ativo de risco é uma função linear de vários fatores macroeconômicos e índices teóricos de mercado.

Em termos práticos, a inclusão das crenças do investidor faz com que o modelo Black-Litterman possa ser diretamente utilizado em um processo de investimento que combine modelos de apoio à tomada de decisão com análises de cenários econômicos derivadas da experiência e opinião de economistas e gestores de recursos. Para nosso estudo de caso, vamos considerar que a carteira neutra seja a mesma utilizada para o estudo da média-variância e incorporar a crença do investidor de que o retorno esperado do IBrX será 20% maior que o retorno esperado do S&P500, no período analisado³³.

Na **Figura 4**, são apresentadas as alocações obtidas para o caso de estudo, através do modelo de Black-Litterman. Conforme esperado, o modelo passa a considerar o IBrX100 atribuindo um peso de alocação diferente de zero. Assim, as carteiras resultantes tornam-se mais diversificadas ao incorporar uma visão específica do investidor. Na verdade, a incorporação das crenças do investidor torna as alocações resultantes mais intuitivas e próximas do que o gestor de recursos espera.

Figura 4. Alocações resultantes do modelo de Black-Litterman de entrada



(Fonte: Itaú Asset Management em Junho de 2015)

³³Estruturamos o caso de estudo do Black-Litterman desta forma para que fosse possível a comparação dos pesos de alocação obtidos com a média-variância.

Incerteza e os Modelos de Alocação

A incerteza que existe nas estimativas futuras da média e da variância dos retornos dos ativos e a sensibilidade aos dados de entrada dos modelos de alocação até então existentes fizeram com que novos modelos de alocação mais robustos fossem desenvolvidos. A técnica mais famosa nessa linha foi apresentada por Michaud³⁴ em 1998 e consiste em uma alternativa para diminuir a sensibilidade das metodologias clássicas a erros nas estimações dos parâmetros. No modelo de Michaud, são geradas alocações para diferentes cenários. O resultado final é dado pela média dessas diversas alocações.

De forma geral, o modelo utiliza a simulação de Monte Carlo para inserir choques nas expectativas futuras da média dos retornos que levem em consideração o grau de incerteza nas mesmas. O mesmo procedimento pode ser feito na matriz de covariância, entretanto, o mais usual é aplicar o procedimento somente na média³⁵. Desta forma, diversas alocações são obtidas para cada conjunto de valores gerados por simulação e, ao final do processo, é tomada a média dessas carteiras. O procedimento é conhecido por ser mais robusto e, portanto, menos sensível a erros nas expectativas.

Com isso, fornece alocações que não se modificam substancialmente devido a pequenas perturbações nos dados de entrada como ocorre na média-variância de Markowitz.

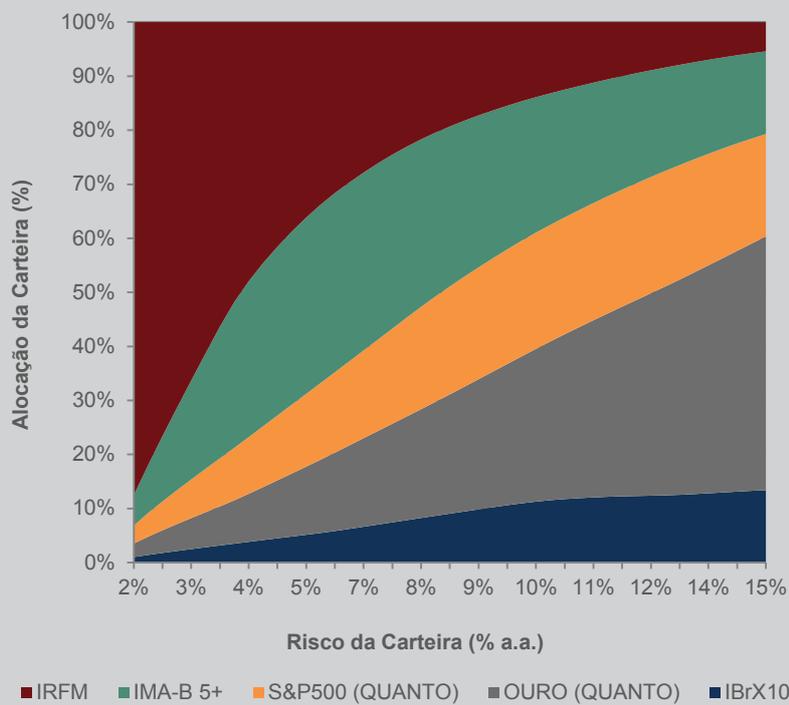
Na **Figura 5**, apresentamos alocações obtidas pelo modelo de Michaud para o nosso caso de estudo. Observa-se que o modelo aloca no IBrX100, deixando as carteiras mais diversificadas. Torna-se importante ressaltar que, mesmo com médias e matriz de covariância um pouco diferentes, não há muita influência sobre a alocação obtida.

O processo de reamostragem possui algumas limitações técnicas que podem distorcer de forma considerável seu resultado. Essas limitações são discutidas por Scherer (2002). O procedimento de reamostragem não possui qualquer fundamento econômico conceitual em teoria da escolha sob condições de risco. Trata-se de um procedimento heurístico, decorrente do simples fato de que a média das carteiras cujas alocações se somam à unidade também será uma carteira cujas alocações se somam à unidade.

³⁴A chamada técnica de reamostragem desenvolvida por Richard Michaud e Robert Michaud foi patenteada nos EUA (US Patent 6003018) e requer licenciamento ou autorização para sua utilização prática. Os pedidos de patente ao redor do mundo ainda estão pendentes.

³⁵Em Ziemba e Chopra (1993), mostra-se que o erro de estimação da média é dez vezes mais importante em termos do impacto nas alocações que o erro de estimação nas variâncias dos ativos e vinte vezes mais importante que o erro de estimação nas correlações.

Figura 5. Alocações resultantes do modelo de Michaud

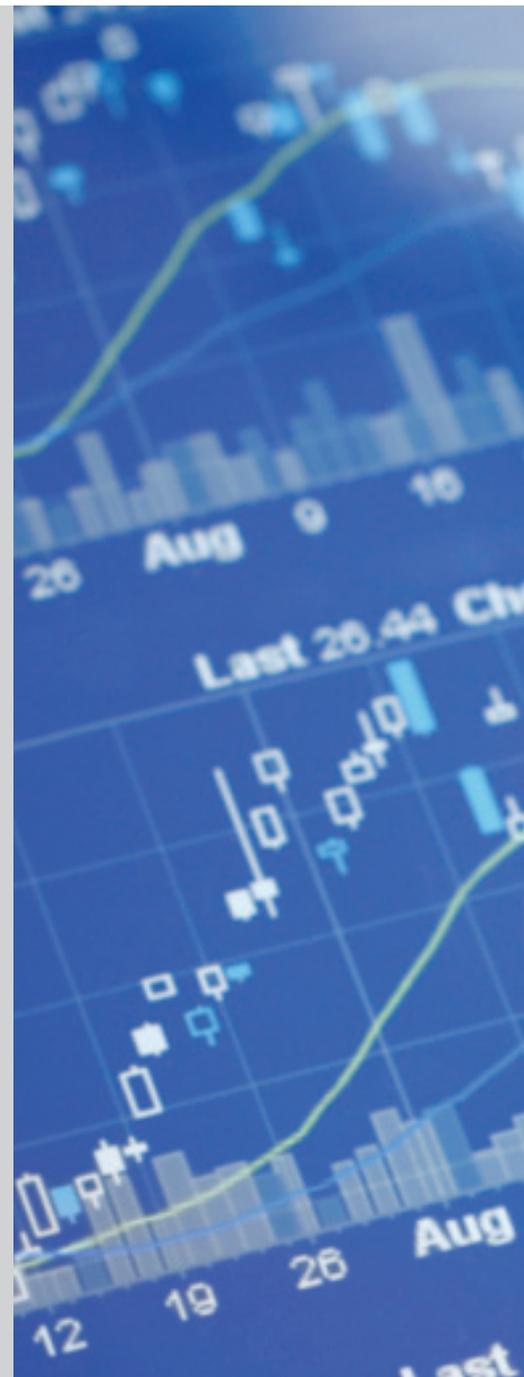


(Fonte: Itaú Asset Management em Junho de 2015)

Alocação da carteira com volatilidade de 8%a.a.

| Classe de Ativo | Alocação |
|-----------------|----------|
| IRFM | 22% |
| IMA-B5+ | 31% |
| S&P500 (Quanto) | 19% |
| Ouro (Quanto) | 20% |
| IBX100 | 8% |

(Fonte: Itaú Asset Management em Junho de 2015)



Alternativas e Variações nos Modelos de Alocação

Conforme mencionado anteriormente, o modelo de média-variância de Markowitz possui muitas limitações como a possibilidade de concentração em alguns ativos, problemas de estabilidade relacionados à alta sensibilidade aos dados de entrada e obtenção de alocações pouco intuitivas. Adicionalmente, existem algumas hipóteses limitadoras, como a consideração de retornos normalmente distribuídos e a preferência dos investidores descrita no compromisso entre média-variância³⁶. Vários trabalhos surgiram para tentar acomodar quaisquer tipos de distribuições e diferentes funções de preferência do investidor. Adler e Kritzman (2007), por exemplo, descreve bem este tipo de solução³⁷.

Adicionalmente, vários modelos denominados de robustos apareceram para lidar com o problema da estabilidade dos modelos de média-variância. Por definição, as metodologias chamadas robustas procuram determinar a melhor alocação na presença do risco de estimação das entradas do modelo de alocação. Contudo, o modelo apresentado por Michaud possui lacunas teóricas relacionadas à justificativa do procedimento que fazem com que não seja amplamente aceito. Cabe lembrar também que o modelo de Michaud não considera distribuições que não sejam normais. Alternativamente, surgiu uma classe de modelos que procuram incorporar informações provenientes de crenças do investidor ao modelo

de alocação. No caso do modelo de Black-Litterman, o mercado é diretamente contraído em direção às crenças do investidor. No caso de outros modelos dessa linha, o mercado é indiretamente contraído em direção às crenças do investidor por meio dos parâmetros das distribuições do mercado. O modelo de Black-Litterman possui limitações relacionadas à suposição da distribuição normal para os retornos e à necessidade de determinar alguns parâmetros do modelo, cujas escolhas parecem arbitrárias³⁸.

Claramente, os modelos de Black-Litterman e o de Michaud ainda estão restritos ao espaço média-variância. Contudo, existem técnicas recentes de alocação de ativos chamadas de alocações baseadas no risco. Estes modelos de alocação também são conhecidos como diversificadores de risco. Como exemplo, podemos citar a famosa alocação por paridade de risco. Esta metodologia consiste em fazer com que o risco da carteira de investimento tenha contribuições iguais de cada classe de ativos³⁹. Tais procedimentos de alocação proliferaram-se bastante após a crise de 2008, com o aumento da preocupação com gestão de risco⁴⁰. Torna-se importante destacar que, ao não utilizar estimativas futuras da média dos retornos, os procedimentos baseados em risco apresentam menor instabilidade associada a perturbações nos dados de entrada.

³⁶Em Chamberlain (1983), mostra-se que a aproximação da função utilidade do procedimento de média-variância de Markowitz é exata quando os retornos apresentam distribuições elípticas tais como a distribuição normal, de Student e Levy. Alternativamente, um outro trabalho nesta mesma linha é o de Owen e Rabinovich (1983).

³⁷Em Adler e Kritzman (2007), é possível encontrar a formalização do modelo chamado Full-Scale Optimization, denominado assim pelo fato de que o modelo de média-variância de Markowitz faz uma otimização que considera somente a distribuição normal e, portanto, não é suficientemente flexível para acomodar outras distribuições e funções utilidade.

³⁸Conforme a notação apresentada no Apêndice B, o parâmetro do modelo de Black-Litterman normalmente é arbitrariamente escolhido.

³⁹Uma referência bem completa sobre o assunto de paridade de risco é o livro de Roncalli (2013).

⁴⁰A tolerância ao risco dos investidores parece ter diminuído após a crise de 2008 e ideias de carteiras do estilo risk on/risk off difundiram-se amplamente.

Comentários Finais

Existem muitos modelos disponíveis na literatura e, ao longo do texto, apresentamos alguns deles com mais detalhes, enquanto outros foram apenas mencionados. As metodologias de construção de carteiras evoluem continuamente e o gestor de recursos precisa de uma atualização constante para conseguir oferecer “o estado da arte” para seus clientes. Além disso, a complexidade dos modelos de alocação faz com que seja necessária a criação de áreas de pesquisa quantitativa, dedicadas à prospecção e desenvolvimento destes.

Destacamos os conceitos envolvidos para que o leitor possa utilizar o texto como roteiro em seus estudos sobre modelagem de alocação. Apesar da variedade de modelos disponíveis, todas as alternativas apresentam

dificuldades que precisam ser consideradas em sua utilização, sob pena de implicar riscos para todo o processo de investimento.

Lembramos que o texto se restringiu à análise de alocação dos ativos. Para uma completa decisão de investimento, a modelagem deve contemplar, em conjunto, os ativos e passivos, em uma abordagem ampla do balanço do investidor.

Terminamos o texto com uma frase que ilustra o pensamento apresentado:

“Essencialmente, todos os modelos estão errados, mas alguns são úteis.” George E. P. Box.

Apêndice A

Modelo de Média-Variância

Genericamente, os modelos de alocação de ativos consistem em problemas de otimização da seguinte forma:

$$\omega^* \equiv \underset{\omega \in C}{\operatorname{argmax}} \{U(\omega)\},$$

Onde:

ω representa um vetor de dimensão $n \times 1$ contendo pesos de alocação para n ativos de risco,

$U(\omega)$ representa uma função utilidade que depende de ω ,

C representa um conjunto de restrições às quais ω deve satisfazer,

ω^* representa o vetor ótimo de alocação de dimensão igual à ω que maximiza a função utilidade respeitando as restrições impostas C .

Nas alocações que apresentamos como casos de estudo ao longo do texto, C consiste em duas restrições: a soma dos pesos das alocações deve ser igual a 1 e cada um dos pesos deve estar entre 0 e 1. Obviamente, qualquer conjunto de restrições poderia ter sido definido.

No contexto da teoria moderna de carteiras e da fronteira eficiente de Markowitz (1952), os log-retornos dos ativos de risco excessivos à taxa livre de risco representados através do vetor aleatório R de dimensão $n \times 1$ são modelados através de uma distribuição normal multivariada e, portanto, tais R podem ser descritos por dois parâmetros: um vetor de valores esperados $\mu \equiv E[R]$ de dimensão $n \times 1$ e uma matriz de covariância $\Sigma \equiv \operatorname{Var}[R]$ de dimensão $n \times n$. Em tais condições, e também no caso mais geral de R seguir uma distribuição elíptica (veja Chamberlain (1983) ou Owen e Rabinovich (1983)), mostra-se que a função utilidade é dada por:

$$U(\omega) = \omega' \mu - \lambda / 2 \omega' \Sigma \omega,$$

Onde:

$\lambda \in \mathbf{R}^+$ é o chamado multiplicador de Lagrange e pode ser interpretado como nível de aversão ao risco.

Portanto, o problema de otimização de média-variância é dado por:

$$\omega_\lambda^* \equiv \underset{\omega \in C}{\operatorname{argmax}} \{\omega' \mu - \lambda / 2 \omega' \Sigma \omega\}$$

e escrevemos a solução ótima como ω_λ^* para destacar que ela depende de λ . Assim, o conjunto carteiras ótimas ω_λ^* é definido como fronteira eficiente. Torna-se importante destacar que o espaço definido por $(\omega' \mu, \omega' \Sigma \omega)$ é referido como espaço média-variância. Observa-se que o procedimento de média-variância é totalmente dependente de μ e Σ , os quais devem ser estimados para o horizonte de tempo do investimento e não são, necessariamente, os correspondentes valores amostrais obtidos através dos dados históricos disponíveis.

Apêndice B

Modelo de Black-Litterman

O modelo de Black-Litterman (1992) permite incluir crenças ou visões do investidor em uma carteira neutra de mercado. A fórmula de Black-Litterman que faz esta incorporação ao valor esperado da carteira neutra de mercado é dada por:

$$E[R] = [(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} Q],$$

Onde:

R é o vetor aleatório de dimensão $n \times 1$ dos log-retornos excessivos à taxa livre de risco de n ativos de risco,

Π é o vetor de dimensão $n \times 1$ do valor esperado da carteira neutra de mercado,

Σ é a matriz de covariância de dimensão $n \times n$ da carteira neutra de mercado,

τ é um escalar,

Ω é a matriz diagonal de dimensão $k \times k$ de incertezas associadas com cada uma das k visões,

P é a matriz de dimensão $k \times n$ que identifica os ativos de risco associados às visões e Q é o vetor de dimensão $k \times 1$ de visões.

Originalmente, o modelo de Black-Litterman parte da carteira neutra dada pelos retornos esperados de equilíbrio de mercado determinados pelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). Ao invés do CAPM, pode-se utilizar outras formas para obter esta carteira base. Por exemplo, na ausência de informação relevante, poderíamos partir de uma carteira base de pesos iguais para todos os ativos de risco e, ao incorporar as visões do investidor, esta carteira seria modificada pelo procedimento de Black-Litterman.

A forma pela qual ocorre a incorporação de informações a priori no modelo Black-Litterman de alocação torna-o bayesiano, ou seja, é possível identificar o modelo Black-Litterman como uma aplicação de inferência bayesiana³².

Em termos bayesianos, Π é o valor esperado a priori da carteira neutra de mercado e $E[R]$ é o valor esperado a posteriori da carteira neutra de mercado ao incorporar as visões do investidor expressas por Q . Originalmente, o modelo de Black-Litterman incorpora visões apenas ao valor esperado da carteira neutra de mercado. Em Ziemba e Chopra (1993), mostra-se que o erro de estimação do valor esperado é dez vezes mais importante em termos do impacto nas alocações que o erro de estimação nas variâncias dos ativos, e vinte vezes mais importante que o erro de estimação nas correlações.

Os gestores de carteiras possuem visões específicas com relação aos retornos esperados de alguns ativos de risco. Conforme formulação apresentada, a forma como as visões são incorporadas ao modelo de Black-Litterman é bem flexível. Tais visões podem ser expressas em termos absolutos ou relativos entre os ativos de risco.

Por exemplo, poderíamos dizer que um ativo A possui retorno esperado de 5% a.a. ou que o retorno do ativo A será 10% superior ao retorno do ativo B. Adicionalmente, várias visões diferentes com relação a um mesmo ativo ou conjunto de ativos podem ser incorporadas. Para maiores detalhes sobre como incorporar as visões aos modelos de Black-Litterman, ou seja, como construir P , Q e Ω , veja Idzorek (2005). Finalmente, o escalar τ é normalmente fixado de forma *ad hoc*.

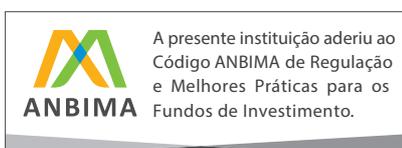
³²A inferência bayesiana é um tipo de inferência estatística em que a regra de Bayes é utilizada para atualizar a estimativa de probabilidade para uma hipótese quando novas informações tornam-se disponíveis. Tecnicamente, ela deriva a probabilidade posterior (ou a posteriori) como consequência de uma probabilidade anterior (ou a priori) e uma função de verossimilhança. No trabalho original de Black e Litterman (1992), o desenvolvimento do modelo baseou-se no modelo de estimação de mistura de Theil (1971). Contudo, utilizando-se de inferência bayesiana, é possível obter os mesmos resultados.

Referências Bibliográficas

- Adler, T.; M. Kritzman (2007)**, "Mean–variance versus full-scale optimization: In and out of sample", *Journal of Asset Management* 7 (5): 302–311.
- Black, F.; Litterman, R. (1992)**, "Global portfolio optimization", *Financial Analysts Journal* 48 (5): 28–43.
- Chamberlain, G. (1983)**, "A characterization of the distributions that imply mean-variance utility functions", *Journal of Economic Theory* 29: 185–201.
- Chopra, V. K.; Ziemba, W. T. (1993)**, "The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice", *Journal of Portfolio Management* 19 (2): 6–11.
- Fama, E. F.; French, K. R. (1992)**, "The cross-section of expected stock returns", *Journal of Finance* 47 (2): 427–465.
- Fama, E. F.; French, K. R. (1993)**, "Common risk factors in the returns on stocks and bonds", *Journal of Financial Economics* 33 (1): 3–56.
- Fama, E. F.; French, K. R. (2004)**, "The capital asset pricing model: theory and evidence", *Journal of Economic Perspectives* 18 (3): 25–46.
- Idzorek, T. M. (2005)**, A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. Research Paper, Ibbotson Associates, Chicago.
- Ilmanen, A. (2011)**, *Expected Returns: An Investor's Guide to Harvesting Market Rewards*. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons.
- Ledoit, O.; Wolf, M. (2003)**, "Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection", *Journal of Empirical Finance* 10 (5): 603–621.
- Ledoit, O.; Wolf, M. (2004)**, "Honey, I shrunk the sample covariance matrix", *Journal of Portfolio Management* 30 (4): 110–119.
- Lintner, J. (1965a)**, "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", *Review of Economics and Statistics* 47 (1): 13–37.
- Lintner, J. (1965b)**, "Security prices, risk and maximal gains from diversification", *Journal of Finance* 20 (4): 587–615.
- Markowitz, H. M. (1952)**, "Portfolio selection", *The Journal of Finance* 7 (1): 77–91.
- Michaud, R. O. (1998)**, *Efficient Asset Management*. Boston, MA: Harvard Business School Press.
- Mossin, J. (1966)**, "Equilibrium in a capital asset market", *Econometrica* 34 (4): 768–783.
- Owen, J.; Rabinovitch, R. (1983)**, "On the class of elliptical distributions and their applications to the theory of portfolio choice", *Journal of Finance* 38 (3): 745–752.
- Roncalli, T. (2013)**, *Introduction to Risk Parity and Risk Budgeting*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- Ross, S. (1976)**, "The arbitrage theory of capital asset pricing", *Journal of Economic Theory* 13 (3): 341–360.
- Sharpe, W. F. (1964)**, "Capital asset prices – A theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of Finance* 19 (3): 425–442.
- Scherer, B. (2002)**, "Portfolio resampling: review and critique", *Financial Analysts Journal* 58 (6): 98–109.
- Theil, H. (1971)**, *Principles of Econometrics*. New York, NY: John Wiley and Sons. Treynor, J. L. (1961), *Market Value, Time, and Risk*. Manuscrito não publicado datado em 08/08/1961: 95-209.
- Treynor, J. L. (1962)**, *Toward a theory of market value of risky assets*. Manuscrito não publicado datado de outono de 1962. Uma versão final foi publicada em Korajczyk, R. A. (1999), *Asset Pricing and Portfolio Performance*. London, UK: Risk Books, 15-22.
- Walters, J. (2014)**, *The Black-Litterman Model in Detail*. Manuscrito versão de 20/06/2014 disponível em <http://www.blacklitterman.org>.

Disclaimer

A Itaú Asset Management é a área responsável pela gestão dos fundos do conglomerado Itaú Unibanco. O Itaú Unibanco não se responsabiliza por qualquer decisão de investimento que venha a ser tomada com base nas informações aqui mencionadas. Leia o prospecto e o regulamento antes de investir. Dúvidas, reclamações e sugestões, utilize o SAC Itaú: 0800 7280728, todos os dias, 24 horas, ou o Fale Conosco (www.itaub.com.br), ou a Ouvidoria Corporativa Itaú: 0800 570 0011, dias úteis, das 9h às 18h, Caixa Postal 67.600, CEP 03162-971. Deficientes auditivos ou de fala, 24 horas por dia, 7 dias por semana, 0800 722 1722. Leia o prospecto, o formulário de informações complementares, lâmina de informações essenciais e o regulamento antes de investir.



ItaúAssetManagement

